

# Voroneho diagramy

Tomáš Kraus

4. 2. 2014

# Obsah

- Historie
- Motivace
- Definice
- Vlastnosti
- Delaunayho triangulace
- Algoritmy
  - inkrementální algoritmus
- Zobecnění
- Použití

# Historie

- René Descartes
- Lejeune Dirichlet
- Georgij Feodosjevič Voronoj
- Voroneho, Voroného, Voronojovy, ...
- dekompozice, teselace, ...

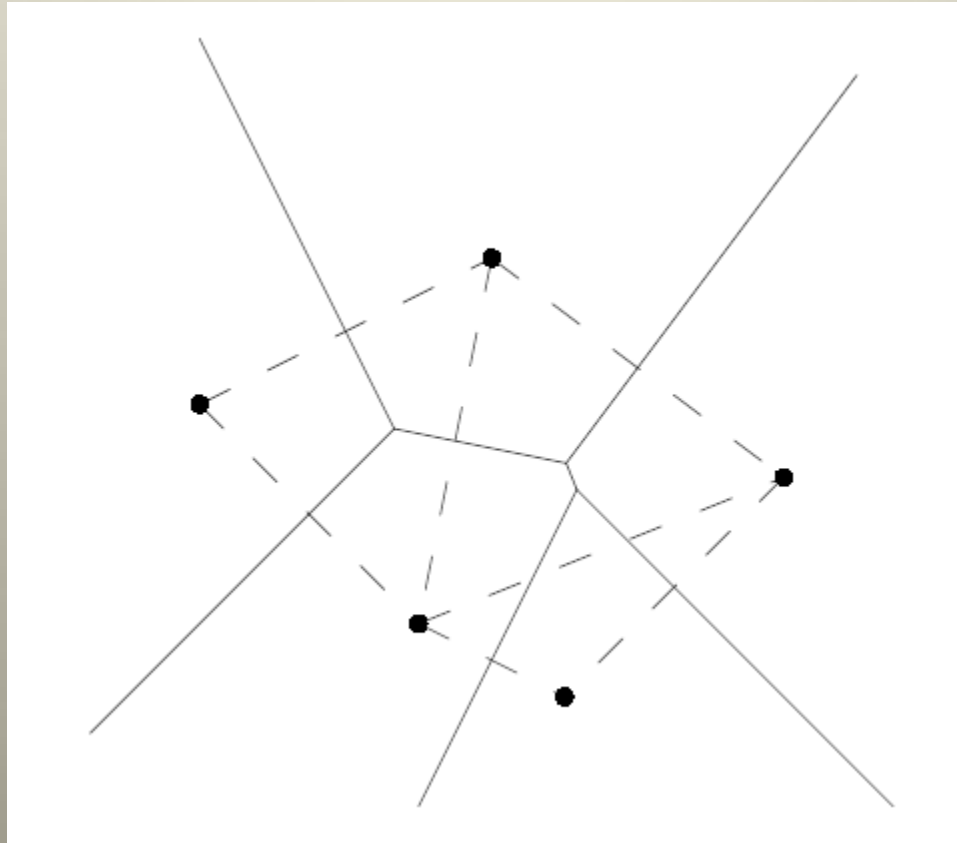
# Motivace

- poštovní problém
- podmínky
  - všude stejná cena zboží
  - náklady = cena zboží + cena dopravy
  - cena dopravy = vzdálenost \* cena za kilometr
  - lidé minimalizují své náklady
- ve skutečnosti nejsou podmínky splněny

# Definice

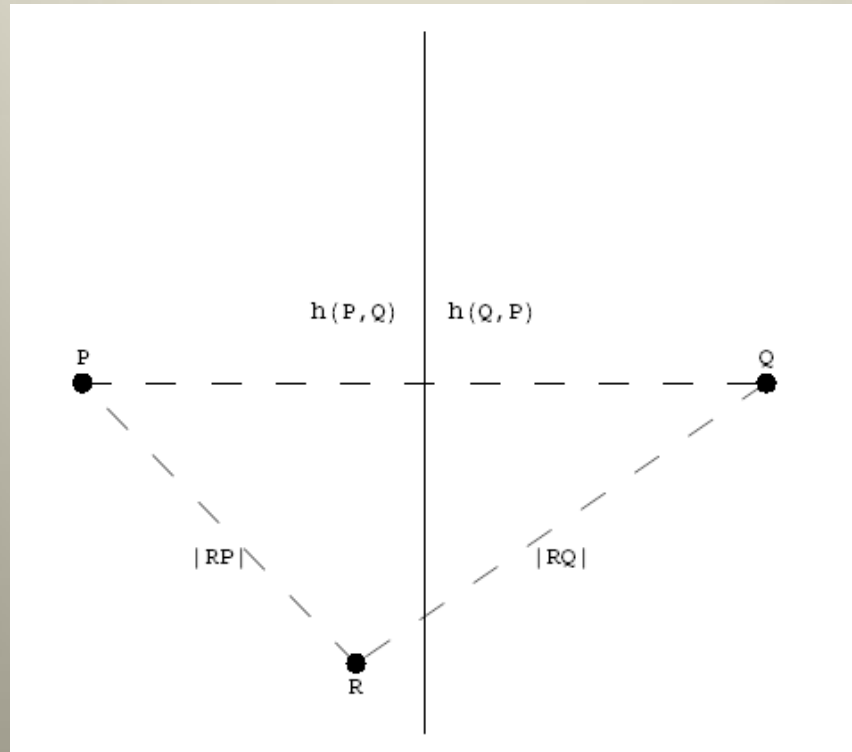
- množina generujících bodů  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$
- Voroneho diagram  $Vor(P)$
- Voroneho buňka  $v(P_i)$
- $\forall Q \in v(P_i): |QP_i| < |QP_j| \ (\forall P_j \in P, j \neq i)$

# Ukázka



# Vlastnosti (1/6)

- $R \in h(P, Q) \Leftrightarrow |RP| < |RQ|$



# Vlastnosti (2/6)

- vlastnosti buňky:

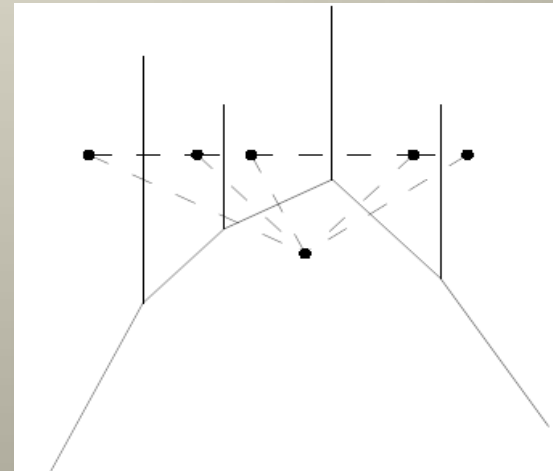
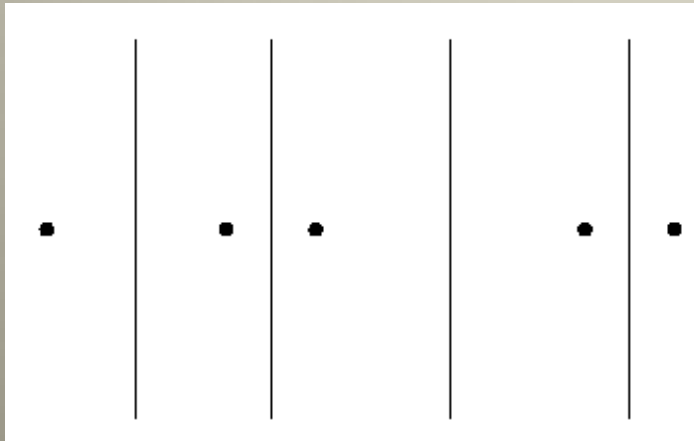
$$v(P_i) = \bigcap_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} h(P_i, P_j)$$

- konvexní, otevřená, mnohoúhelníková oblast
- nejvýše  $n - 1$  vrcholů, nejvýše  $n - 1$  hran
- $v(P_i)$  neohraničená  $\Leftrightarrow P_i$  na hranici  $CH(P)$



# Vlastnosti (3/6)

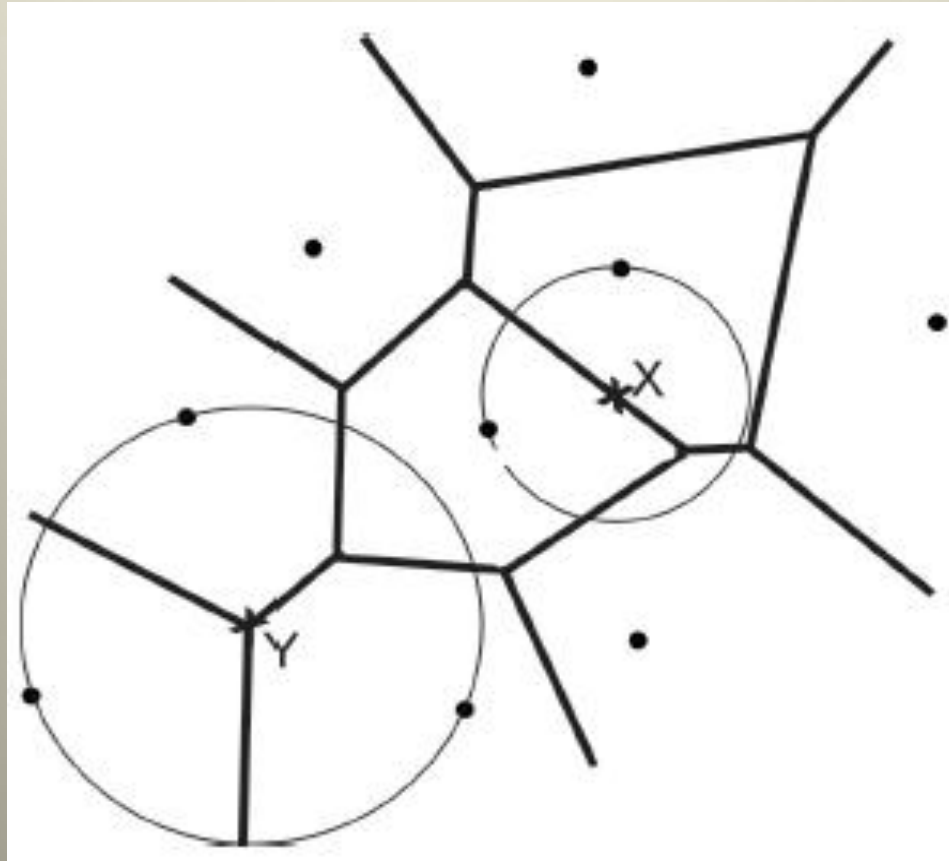
- hrany Voroneho diagramu: úsečky, polopřímky, přímky



# Vlastnosti (4/6)

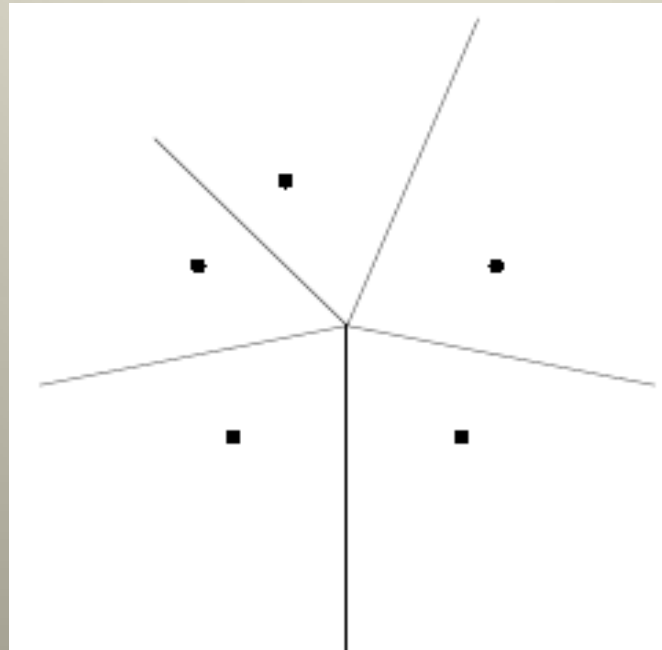
- Voroneho vrchol
- $n$  generujících bodů: nejvýše  $2n - 6$  vrcholů; nejvýše  $3n - 6$  hran
- Osa úsečky  $P_i P_j$  definuje hranu Voroneho diagramu  $\Leftrightarrow$  na ose úsečky  $P_i P_j$  existuje bod  $X$  takový, že na kružnici  $C_p(X)$  leží pouze generující body  $P_i$  a  $P_j$ .
- Průsečík  $Y$  osy úsečky  $P_i P_j$  je Voroneho vrcholem  $\Leftrightarrow$  na kružnici  $C_p(Y)$  leží tři nebo více generujících bodů množiny  $P$ .

# Vlastnosti (5/6)



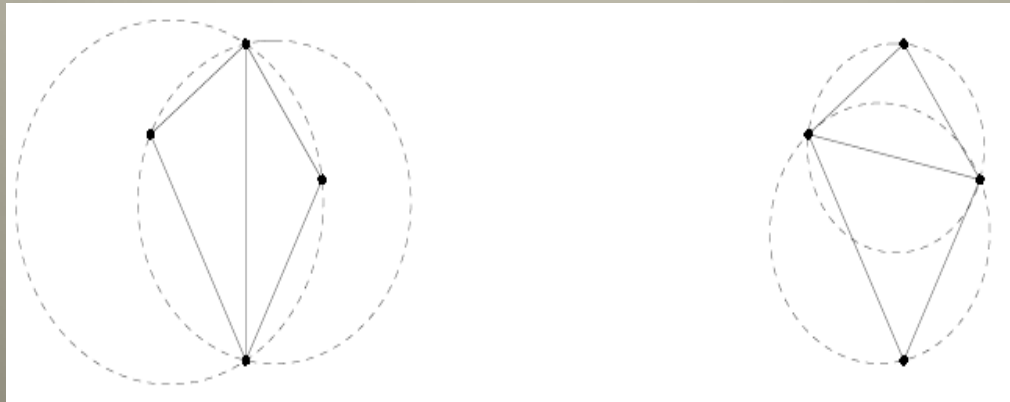
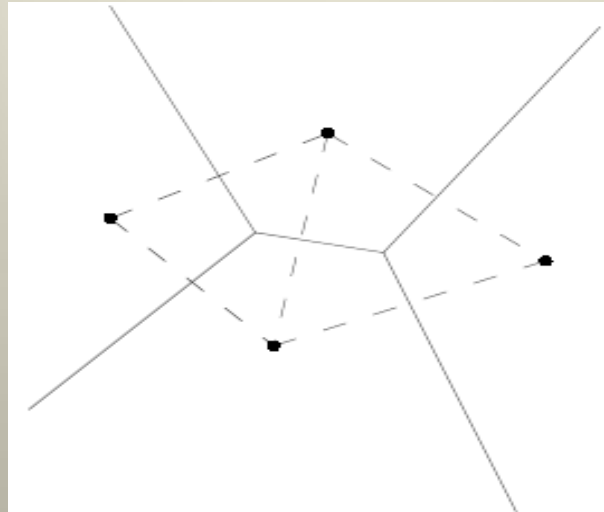
# Vlastnosti (6/6)

- degenerace Voroneho diagramu



# Delaunayho triangulace

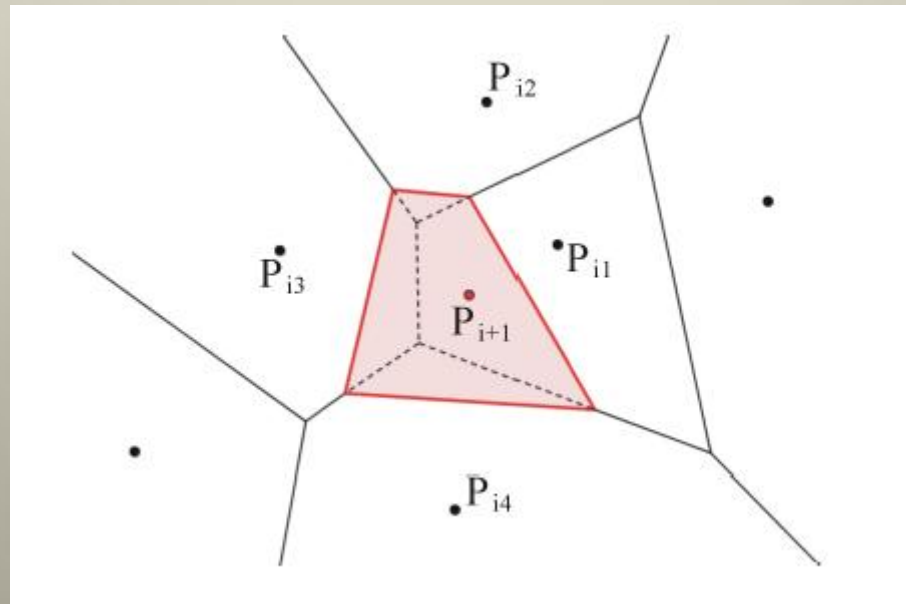
- duální struktura k Voroneho diagramu



# Algoritmy

- optimální složitost:  $O(n \log n)$
- naivní
- inkrementální
- Fortuneho
- Rozděl a panuj

# Inkrementální algoritmus



# Zobecnění

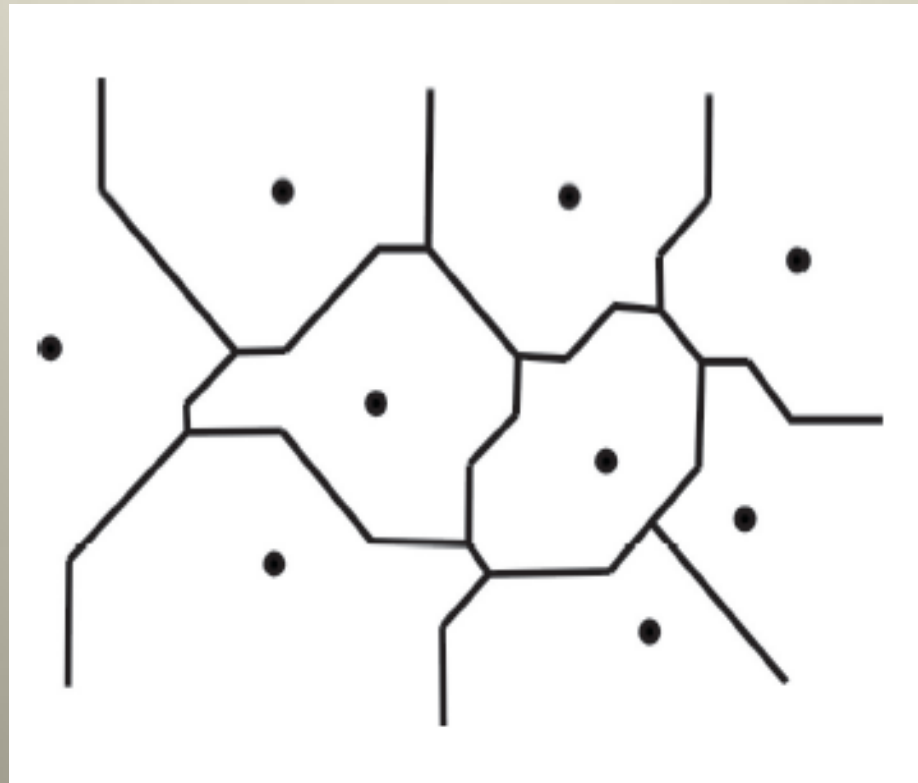
- změna dimenze
- změna metriky (např. metrika  $L_p$ :

$$\text{dist}_p(P, Q) = \|PQ\| = \left( \sum_{i=1}^k |p_i - q_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- přidání váhy generujících bodů – vážené Voroneho diagramy
- diagramy pro úsečky a jiné útvary



# Ukázka



# Použití

- hledání ideálního rozmístění (poštovní problém)
- matematika – geometrie
- klimatologie (Thiessenovy polygony)
- biologie, chemie, krystalografie
- hornictví, těžební průmysl
- umění
- ekonomie
- informatika, programování robotů, grafika